E.N.S.I. de CHIMIE groupe CENTRE (P et TB) SESSION 1987

MATHÉMATIQUES *Calculatrice autorisée* DURÉE : 4 heures

Dans ce problème, c désigne un nombre réel strictement positif fixé. Toutes les fonctions considérées sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On considère l'équation aux dérivées partielles, dite *équation des cordes vibrantes*, suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1}$$

en la fonction inconnue $u(x, t)$ de classe $\mathcal{C}^2$ des deux variables réelles x et t.

Une solution de l'équation (1) est dite *stationnaire* si et seulement s'il existe deux fonctions v et w d'une variable réelle, de classe $\mathcal{C}^2$, telles que pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ on ait :

$$u(x, t) = v(x)\, w(t).$$

1° Soit $u(x, t)$ une solution de l'équation (1).

a. Montrer qu'il existe une unique fonction $u_1(X, Y)$ des deux variables réelles X et Y, de classe $\mathcal{C}^2$, telle que l'on ait pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2$:

$$u_1(x - ct, x + ct) = u(x, t).$$

Montrer que u_1 est solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial X \partial Y} = 0. \tag{2}$$

b. Montrer que pour que u_1 soit solution de (2) il faut et il suffit qu'il existe deux fonctions d'une variable réelle φ et ψ de classe $\mathcal{C}^2$, telles que l'on ait pour tout $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$:

$$u_1(X, Y) = \varphi(X) + \psi(Y).$$

En déduire l'expression générale des solutions $u(x, t)$ de l'équation (1).

c. Soit $U(x)$ une fonction définie sur $[0, +\infty[$, de classe $\mathcal{C}^2$, telle que $U(0) = U''(0) = 0$.

Déterminer la solution $u(x, t)$ de l'équation (1) vérifiant les trois conditions initiales i., i.i. et i.i.i. suivantes :

i. $u(0, t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

i.i. $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

i.i.i. $u(x, 0) = U(x)$ pour tout $x \geqslant 0$.

On pourra utiliser la fonction $U_1(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, impaire, et qui coïncide avec $U(x)$ pour tout $x \geqslant 0$.

2° Soit λ une constante réelle. Montrer que si v et w sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ d'une variable réelle qui vérifient le système (S_λ) suivant :

$$(S_\lambda, 1) \qquad v'' = \lambda v$$
$$(S_\lambda, 2) \qquad w'' = \lambda c^2 w$$

alors $u(x, t) = v(x)\, w(t)$ est solution de l'équation (1).

3° Réciproquement soit $u(x,t) = v(x)w(t)$ une solution stationnaire non identiquement nulle de l'équation (1). Montrer qu'il existe une constante réelle λ telle que v et w soient solutions du système (S_λ).

Tournez la page S. V. P.

4° Soit l un nombre réel strictement positif. On pose $T = \frac{l}{c}$.

Soit $u(x, t) = v(x)\, w(t)$ une solution stationnaire non identiquement nulle de l'équation (1) qui vérifie les conditions aux limites (L) suivantes :

(L1) $$u(0, t) = u(l, t) = 0 \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

(L2) $$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

a. Montrer que v et w vérifient les conditions aux limites $v(0) = v(l) = 0$ et $w'(0) = 0$.

b. Montrer que le nombre réel λ tel que v et w soient solutions du système (S_λ) ne peut prendre qu'une infinité dénombrable de valeurs négatives $-\omega_1^2, -\omega_2^2, \ldots -\omega_n^2, \ldots$ (avec $0 < \omega_1 < \omega_2 \ldots < \omega_n \ldots$) que l'on déterminera. Déterminer les solutions stationnaires non identiquement nulles de l'équation (1) qui vérifient les conditions (L) correspondant au cas où $\lambda = -\omega_n^2$.

La suite du I ne concerne que l'option TB

5° Soit $V(z)$ une fonction de la variable réelle z de classe $\mathcal{C}^2$, impaire et 2π-périodique. Soit $\sum_{n \geq 1} b_n \cdot \sin nz$ le développement en série de Fourier de $V(z)$.

Déterminer les fonctions, de classe $\mathcal{C}^2$, $A_0(t)$ et, pour tout nombre entier $n \geqslant 1$, $A_n(t)$ et $B_n(t)$ de telle sorte que la fonction $u(x, t)$ définie pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ par l'égalité :

(E) $$u(x, t) = A_0(t) + \sum_{n \geq 1} \left[A_n(t) \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} + B_n(t) \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} \right]$$

soit solution de l'équation (1) et vérifie les conditions (L), et que de plus on ait :

$$u(x, 0) = V\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On admettra sans démonstration que l'on peut dériver le deuxième membre de (E) terme à terme autant de fois que nécessaire, tant par rapport à x que par rapport à t, et l'on ne cherchera pas à démontrer la convergence de la série obtenue.

6° Soient m et s deux nombres réels, avec $0 \leqslant m \leqslant 1$. On considère la fonction $W_{m,s}(z)$ de la variable réelle z, impaire et 2π-périodique telle que :

(a) $$W_{m,s}(\pi - z) = W_{m,s}(z) \text{ pour tout } z \in \mathbb{R};$$

(b) $$W_{m,s}(z) = sz \text{ pour } 0 \leqslant z \leqslant \frac{m\pi}{2};$$

(c) $$W_{m,s}(z) = \frac{sm\pi}{2} \text{ pour } \frac{m\pi}{2} \leqslant z \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Tracer le graphe de $W_{m,s}(z)$ sur l'intervalle $[-2\pi, +2\pi]$ dans les deux cas $(m, s) = (1,1)$ et $(m, s) = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

Déterminer le développement en série de Fourier de $W_{m,s}$ et justifier l'égalité de $W_{m,s}$ avec la somme de sa série de Fourier.

7° Soit $u(x, t)$ la fonction des deux variables réelles x et t définie par l'égalité (E) de la 5e question, mais en remplaçant, dans l'expression des fonctions $A_0(t)$, $A_n(t)$ et $B_n(t)$ pour tout $n \geqslant 1$, les coefficients de Fourier de $V(z)$ par ceux de $W_{1,1}(z)$.

Déterminer pour chaque valeur de t comprise au sens large entre 0 et T les valeurs de m et s pour lesquelles on a :

$$u(x, t) = W_{m,s}\left(\frac{\pi x}{l}\right).$$

Tournez la page S. V. P.

-3-

Le II ne concerne que l'option P

II

On considère à présent l'*équation des membranes vibrantes* : (3) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

en la fonction inconnue $u(x, y, t)$ de classe $\mathcal{C}^2$ des trois variables réelles x, y et t.

Dans ce cas, une solution *stationnaire* de l'équation (3) est une solution $u(x, y, t)$ qui peut se mettre sous la forme :

$$u(x, y, t) = v(x, y)\, w(t)$$

où v et w sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ définies respectivement sur $\mathbb{R}^2$ et sur $\mathbb{R}$.

Un raisonnement identique à celui de la question I, 3° permet de démontrer que pour toute solution stationnaire non identiquement nulle $u(x, y, t) = v(x, y)\, w(t)$ de l'équation (3), il existe une constante réelle λ telle que v et w soient solutions du système (S'_λ) suivant :

$$(S'_\lambda, 1) \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \lambda v$$

$$(S'_\lambda, 2) \qquad w'' = \lambda c^2 w$$

Nous admettrons ce résultat.

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on pose $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Soit $u(x, y, t)$ une solution stationnaire non identiquement nulle de l'équation (3) de la forme : $u(x, y, t) = f(r(x, y))\, w(t)$

où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ d'une variable réelle. On suppose que de plus u vérifie les conditions aux limites (L') suivantes :

(L' 1) $u(x, y, t) = 0$ pour tout $(x, y, t) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x^2 + y^2 = R^2$

(L' 2) $\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = 0$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

où R est un nombre réel strictement positif donné.

1° Montrer que f est solution de l'équation différentielle :

$$(B) \qquad f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) - \lambda f(r) = 0$$

pour une certaine valeur du nombre réel λ, et vérifie les conditions aux limites :

$$(C) \qquad f(R) = 0 \quad \text{et} \quad f'(0) = 0.$$

2° Chercher les solutions de (B) qui sont développables en série entière. Déterminer le rayon de convergence des séries obtenues. On ne cherchera pas à calculer leurs sommes.

En déduire toutes les solutions de (B) dont la dérivée s'annule en $r = 0$.

3° Montrer que pour $\lambda \geqslant 0$ la seule solution de (B) qui vérifie les conditions (C) est la solution nulle.

4° Soit $J_0(z)$ la fonction de la variable réelle z définie par :

$$J_0(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

pour tout $z \in \mathbb{R}$.

Soient $z_1, z_2, \ldots z_n, \ldots$ (avec $0 < z_1 < z_2 \ldots < z_n \ldots$) les racines positives, en nombre infini, de l'équation $J_0(z) = 0$. On ne cherchera pas à les calculer.

Déterminer en fonction de $z_1, z_2, \ldots z_n, \ldots$ les valeurs négatives de λ pour lesquelles (B) admet des solutions non identiquement nulles vérifiant les conditions (C).

Déterminer ces solutions, ainsi que les solutions stationnaires non identiquement nulles de l'équation (3) vérifiant les conditions (L') qui leur correspondent.

• • •
•